数理解析研究所講究録 1439 巻 2005 年 79-110

母数の境界近傍における非心分布および標本相関係数の分布の近似

筑波大・理工　加藤 雅章 (Masafumi Kato)
筑波大・数理物質　赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1 はじめに

正規標本に基づく基本的な統計量は理論面のみならず応用面でも重要な役割を果たすことが知られている ([JKB95], [Ta75]). その際, その統計量が非心分布に従うことも多く, その確率密度関数 (p.d.f.) はかなり複雑な形をしているため, 解析的に確率計算を行うことが容易ではないので ([B93], [Y72], [Y77]), 非心分布の上側 (下側) パーセント点の値を求めるためには近似式が有用となり, 従来から, いくつかの近似式が提案されてきた ([JKB95], [O82], [Sa63], [SZ60], [Ta75], [Ti65]). 特に非心度が大きい場合に, 非心分布の近似はあまり良くないことが多く, これまでにその改良がいろいろ試みられている ([A95], [AST95], [To96]).

本論において, 非心度が大きい場合に非心 t 分布, 非心カイ 2 乗分布, 非心 F 分布の近似について論じ, 分布のパーセント点の新たな近似式を提案する ([ATK05]). また, 同様の観点から相関係数の絶対値が大きい場合の標本相関係数の分布のいくつかの近似についても論じ, 従来の近似式の改良を行う. さらに, 数値的な観点から, 新しく提案した近似と従来の近似との比較を行い, 提案した近似の精度の良さを確認する.

2 非心 t 分布の近似

まず, $X_1, \cdots, X_{n_1}$ をたがいに独立にいずれも正規分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$ に従う確率変数, $Y_1, \cdots, Y_{n_2}$ をたがいに独立にいずれも $N(\mu_2, \sigma^2)$ に従う確率変数とし, これらはすべてたがいに独立とする. このとき

$$\bar{X} := \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i, \quad \bar{Y} := \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i,$$

$$S_1^2 := \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 := \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})^2$$

とすれば, 統計量

$$T := \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1+n_2-2}}}$$

は自由度 $n_1 + n_2 - 2$, 非心度 $\sqrt{n_1 n_2/(n_1+n_2)}(\mu_1 - \mu_2)/\sigma$ をもつ非心 t 分布に従うことが知られている. そして, T は $\mu_1 - \mu_2$ の区間推定あるいは仮説 $H: \mu_1 = \mu_2$ の検定等の問題において重要な役割を果たす.

そこで, いま, 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とし, S^2 を Z と独立な確率変数とし, νS^2 が自由度 ν の中心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu)$ に従うとする. このとき, $S = \sqrt{S^2}$ として,

$$T_{\nu,\delta} := \frac{Z + \delta}{S}$$

とおくと, $T_{\nu,\delta}$ は自由度 ν, 非心度 δ の非心 t 分布 $t(\nu;\delta)$ に従い, その確率密度関数 (p.d.f.) は

$$f_{T_{\nu,\delta}}(t;\nu,\delta)=\frac{e^{-\delta^2/2}}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\delta\right)^k}{k!}\Gamma\left(\frac{\nu+k+1}{2}\right)\left(\frac{t}{\sqrt{\nu}}\right)^k\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+k+1)/2}$$
$$(-\infty<t<\infty\ ;\ \nu=1,2,\cdots\ ;\ -\infty<\delta<\infty)$$

となり, かなり複雑な形をしている. ただし, $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数とする. そして, その累積分布関数 (c.d.f.) は, $t>0$ について

$$F_{T_{\nu,\delta}}(t):=P\{T_{\nu,\delta}\leq t\}=P\left\{Z+\delta\leq tS\right\} \tag{2.1}$$

になる. このとき, δ が十分大きいものとすると, $F_{T_{\nu,\delta}}(t)$ の値が小さすぎないためには t も大きくしなければならない. このとき, $t>0$ について, (2.1) より

$$F_{T_{\nu,\delta}}(t)=P\left\{S\geq\frac{Z}{t}+\frac{\delta}{t}\right\} \tag{2.2}$$

となる. さらに,

$$G_S(u):=P\left\{S\geq u\right\} \tag{2.3}$$

とすれば, 確率変数 νS^2 は $\chi^2(\nu)$ に従うから, $u>0$ について

$$G_S(u)=P\left\{\nu S^2\geq\nu u^2\right\}=\int_{\nu u^2}^{\infty}\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-x/2}dx$$

となる. ここで, $u>0$ について, $G_S^{(j)}(u)$ を $G_S(u)$ の u についての j 次導関数とすれば,

$$G_S^{(1)}(u)=-c_\nu u^{\nu-1}e^{-\nu u^2/2}$$

となる. ただし,

$$c_\nu:=\frac{\nu}{\Gamma(\nu/2)}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{(\nu/2)-1}$$

である. よって, Taylor 展開により, (2.1)~(2.3) より, 十分大きい $t>0$ に対して

$$\begin{aligned}F_{T_{\nu,\delta}}(t)&=E\left[G_S\left(\frac{Z}{t}+\frac{\delta}{t}\right)\right]\\&\approx G_S\left(\frac{\delta}{t}\right)+\frac{1}{2t^2}G_S{}^{(2)}\left(\frac{\delta}{t}\right)E\left(Z^2\right)+\frac{1}{4!t^4}G_S{}^{(4)}\left(\frac{\delta}{t}\right)E\left(Z^4\right)\\&\qquad+\frac{1}{6!t^6}G_S{}^{(6)}\left(\frac{\delta}{t}\right)E\left(Z^6\right)\\&=G_S\left(\frac{\delta}{t}\right)+\frac{1}{2t^2}G_S{}^{(2)}\left(\frac{\delta}{t}\right)+\frac{1}{8t^4}G_S{}^{(4)}\left(\frac{\delta}{t}\right)+\frac{1}{48t^6}G_S{}^{(6)}\left(\frac{\delta}{t}\right)=:\tilde{F}_{T_{\nu,\delta}}(t)\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$h_{1,\nu}(u):=u^{\nu-1},\quad h_{j+1,\nu}(u)=h_{j,\nu}^{(1)}(u)-\nu u h_{j,\nu}(u)\quad(j=1,2,\cdots)$$

とし,

$$G^{(j)}(u) = -c_\nu h_{j,\nu}(u) e^{-\nu u^2/2} \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

である. 実際, 任意の α $(0 < \alpha < 1)$ について

$$\tilde{F}_{T_{\nu,\delta}}(t) = 1 - \alpha \tag{2.4}$$

となる $t = t_\alpha$ を求めればよく, この t_α は自由度 ν と大きい非心度 δ をもつ非心 t 分布 $t(\nu;\delta)$ の上側 100α パーセント点の近似値となる.

一方, (2.1) より, 任意の α $(0 < \alpha < 1)$ について

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= F_{T_{\nu,\delta}}(t_\alpha) = P\{Z - t_\alpha S < -\delta\} \\ &= P\left\{ \frac{Z - t_\alpha(S - b_\nu)}{\sqrt{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)}} < \frac{t_\alpha b_\nu - \delta}{\sqrt{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)}} \right\} \end{aligned}$$

を満たすような t_α が存在する. ただし,

$$b_\nu := E(S) = \sqrt{\frac{2}{\nu}} \Gamma\left(\frac{\nu + 1}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)$$

とし, $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数とする. ここで, $Var(S) = 1 - b_\nu^2$ であり,

$$W := \frac{Z - t_\alpha(S - b_\nu)}{\sqrt{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)}}$$

とおけば, $E(W) = 0$, $Var(W) = 1$ である. この統計量 W は正規分布に従う確率変数とカイ統計量 S の線形結合に基づく統計量である. この統計量に Cornish-Fisher 展開を適用することで, Akahira [A95] においては, (2.4) より

$$\frac{t_\alpha b_\nu - \delta}{\sqrt{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)}} = u_\alpha - \frac{t_\alpha^3(u_\alpha^2 - 1)}{24\{1 + t_\alpha^2(1 - b_\nu^2)\}^{3/2}} \left\{ \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{4\nu^3} + O\left(\frac{1}{\nu^4}\right) \right\} \tag{2.5}$$

を満たす上側 100α パーセント点の近似値 t_α についての近似式を得ている. また, [A95], Akahira, Sato and Torigoe [AST95] において, 従来良く使われてきた近似式と数値比較して, それらよりも良い近似であることを示している.

そこで, (2.4) の $t^{-4}G_S^{(4)}$ の項まで, (2.4) の $t^{-6}G_S^{(6)}$ の項まで, そして (2.5) から得られるパーセント点の近似値を比較してみると, (2.4) を用いる近似が良いことが分かる (表 2.1–2.3 参照).

3 非心 χ^2 分布の近似

$X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に各 X_i が正規分布 $N(\mu_i, \sigma^2)$ に従う確率変数とすると, $\sum_{i=1}^n X_i^2/\sigma^2$ が自由度 n, 非心度 $\sum_{i=1}^n \mu_i^2/\sigma^2$ の非心 χ^2 分布に従うことが知られている.

そこで, いま, 自由度 ν, 非心度 λ をもつ非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu;\lambda)$ に従う確率変数を $\chi^2_{\nu,\lambda}$ とすると, その p.d.f. は

$$f_{\chi^2_{\nu,\lambda}}(x;\nu,\lambda) = e^{-\lambda/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^k \frac{2^{-(\nu/2)-k}}{\Gamma((\nu/2)+k)} x^{(\nu/2)+k-1} e^{-x/2}$$

$$(0 < x < \infty\ ;\ \nu = 1, 2, \cdots\ ;\ -\infty < \lambda < \infty)$$

になる．特に，ν が偶数の場合に，$\chi^2_{\nu,\lambda}$ の c.d.f. は

$$F_{\chi^2_{\nu,\lambda}}(x) = P\left\{\chi^2_{\nu,\lambda} \leq x\right\} = P\left\{Y_1 - Y_2 \geq \nu/2\right\} \quad (x > 0) \tag{3.1}$$

となる ([JKB95], [Ta75])．ただし，Y_1, Y_2 はそれぞれポアソン分布 $Po(x/2)$, $Po(\lambda/2)$ に従う独立な確率変数とする．よって，Y_1, Y_2 のキュムラント母関数 (c.g.f.) は，それぞれ

$$K_{Y_1}(\theta) = \frac{x}{2}(e^\theta - 1), \quad K_{Y_2}(\theta) = \frac{\lambda}{2}(e^\theta - 1)$$

となるので，$Y_1 - Y_2$ の c.g.f. は

$$K_{Y_1-Y_2}(\theta) = \frac{x}{2}(e^\theta - 1) + \frac{\lambda}{2}(e^{-\theta} - 1) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left\{x + (-1)^j\lambda\right\}\frac{\theta^j}{j!}$$

となる．これより，$Y_1 - Y_2$ の j 次キュムラントは

$$\kappa_j(Y_1 - Y_2) = \frac{1}{2}\left\{x + (-1)^j\lambda\right\} \quad (j = 1, 2, \cdots) \tag{3.2}$$

となる．

ここで，$T := Y_1 - Y_2$ とおけば，(3.2) より

$$E(T) = \frac{1}{2}(x - \lambda), \quad Var(T) = \frac{1}{2}(x + \lambda) \tag{3.3}$$

となるので，

$$Z := \frac{T - \frac{1}{2}(x - \lambda)}{\sqrt{\frac{1}{2}(x + \lambda)}}$$

とすると，(3.1), (3.3) より，連続補正によって，

$$\begin{aligned} P\left\{\chi^2_{\nu,\lambda} > x\right\} &= 1 - P\left\{T \geq \frac{\nu}{2}\right\} = 1 - P\left\{T \geq \frac{\nu}{2} - \frac{1}{2}\right\} \\ &= P\left\{Z < \frac{\nu - (x - \lambda) - 1}{\sqrt{2(x + \lambda)}}\right\} \\ &=: F_Z(z) \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる．ただし，

$$z := \frac{\nu - (x - \lambda) - 1}{\sqrt{2(x + \lambda)}}$$

とする．そこで，(3.2) より，(3.4) に Edgeworth 展開を用いて，

$$F_Z(z) \approx \Phi(z) - \phi(z)\left\{\frac{\sqrt{2}(x - \lambda)}{6(x + \lambda)^{3/2}}(z^2 - 1) + \frac{1}{12(x + \lambda)}(z^3 - 3z)\right.$$

$$+\frac{(x-\lambda)^2}{36(x+\lambda)^3}(z^5-10z^3+15z)-\frac{1}{12(x+\lambda)}z\Bigg\}=:\tilde{F}_Z(z) \tag{3.5}$$

が得られる．ただし，Φ および ϕ はそれぞれ標準正規分布 $N(0,1)$ の c.d.f., p.d.f. とする．よって，$1-\tilde{F}_Z(z)$ により $\chi^2_{\nu,\lambda}$ の c.d.f. は近似される．また，(3.4), (3.5) より

$$\tilde{F}_Z(z)=\alpha \tag{3.6}$$

をみたす $x=x_\alpha$ により，非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu;\lambda)$ の上側 100α パーセント点の近似値を求めることができる．

一方，Torigoe [To96] に従って，Shibata [Sh81] において紹介されている従来用いられてきたパーセント点の近似式について述べる ([JKB95])．まず，非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu;\lambda)$ の上側 100α パーセント点を $\chi^2_\alpha(\nu;\lambda)$ とする．このとき，u_α を $N(0,1)$ の上側 100α パーセント点とすれば，

$$\chi^2_\alpha(\nu;\lambda)\approx(\nu+\lambda)(\mu+\sigma u_\alpha)^{1/h} \tag{3.7}$$

となる ([Sa63])．ただし，

$$h=1-\frac{2(\nu+\lambda)(\nu+3\lambda)}{3(\nu+2\lambda)^2},$$
$$\mu=1+h(h-1)\frac{\nu+2\lambda}{(\nu+\lambda)^2}+h(h-1)(h-2)(1-3h)\frac{(\nu+2\lambda)^2}{2(\nu+\lambda)^4},$$
$$\sigma=\sqrt{h^2\frac{2(\nu+2\lambda)}{(\nu+\lambda)^2}+h^2(h-1)(1-3h)\frac{2(\nu+2\lambda)^2}{(\nu+\lambda)^4}}$$

である．これは，Wilson-Hilferty の近似式の一般化である．

次に，χ^2_m を自由度 m の中心 χ^2 分布 $\chi^2(m)$ に従う確率変数として，$\chi^2_{\nu,\lambda}/c_1$ を χ^2_m で近似すれば，

$$\chi^2_\alpha(\nu;\lambda)\approx c_1\chi^2_\alpha(m) \tag{3.8}$$

となる．ただし，$\chi^2_\alpha(m)$ は中心 χ^2 分布 $\chi^2(m)$ の上側 100α パーセント点であるとする ([Pa49])．ここで，c_1, m は $\chi^2_{\nu,\lambda}/c_1$ と χ^2_m の 1 次および 2 次のキュムラントを等置することにより，

$$c_1=\frac{\nu+2\lambda}{\nu+\lambda},\quad m=\frac{(\nu+\lambda)^2}{\nu+2\lambda}$$

となる．

さらに，$\left(\chi^2_{\nu,\lambda}-b\right)/c_2$ の分布が漸近的に自由度 n の中心 χ^2 分布 $\chi^2(n)$ に従うとすれば，それらの 1 次，2 次および 3 次のキュムラントは等しくなり，

$$\chi^2_\alpha(\nu;\lambda)\approx c_2\chi^2_\alpha(n)+b \tag{3.9}$$

となる．ただし，

$$b=-\frac{\lambda^2}{\nu+3\lambda},\quad c_2=\frac{\nu+3\lambda}{\nu+2\lambda},\quad n=\frac{(\nu+2\lambda)^3}{(\nu+3\lambda)^2}$$

である ([Pe59]). ここで, 一般に, 中心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu)$ の上側 100α パーセント点 $\chi^2_\alpha(\nu)$ について, Cornish-Fisher 展開により,

$$\chi^2_\alpha(\nu) = \nu + \sqrt{2\nu}u_\alpha + \frac{2}{3}\left(u_\alpha^2 - 1\right) + \frac{1}{9\sqrt{2\nu}}\left(u_\alpha^3 - 7u_\alpha\right) - \frac{2}{405\nu}\left(3u_\alpha^4 + 7u_\alpha^2 - 16\right) + o\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

となることが知られている.

また, [A95] の近似のアプローチと同様にして, [To96] において次に述べるような非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu;\lambda)$ の近似式が考えられている. まず, (3.9) より, 十分に大きい ν について

$$\begin{aligned} 1-\alpha &\approx P\left\{\chi^2_{\nu,\lambda} < \chi^2_\alpha(\nu;\lambda)\right\} \\ &= P\left\{\frac{\chi^2_{\nu,\lambda} - b}{c_2} < \frac{\chi^2_\alpha(\nu;\lambda) - b}{c_2}\right\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

となる. ここで, $x_\alpha := \left(\chi^2_\alpha(\nu;\lambda) - b\right)/c_2$, $X := \left(\chi^2_{\nu,\lambda} - b\right)/c_2$ とおくと, X は漸近的に χ^2_n に等しくなる. $S_n := \sqrt{\chi^2_n/n}$ とおけば,

$$b_n := E\left(S_n\right) = \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad Var\left(S_n\right) = 1 - b_n^2$$

となる. よって, (3.10) より, 十分に大きい ν について

$$1-\alpha \approx P\left\{S_n \le \sqrt{\frac{x_\alpha}{n}}\right\} = P\left\{\frac{S_n - b_n}{\sqrt{1-b_n^2}} \le \frac{\sqrt{x_\alpha/n} - b_n}{\sqrt{1-b_n^2}}\right\}$$

となる. また,

$$Z_n := \frac{S_n - b_n}{\sqrt{1-b_n^2}}$$

とおくと, $E(Z_n) = 0$, $Var(Z_n) = 1$ となる. この統計量 Z_n の分布について, Cornish-Fisher 展開を用いて,

$$\chi^2_\alpha(\nu;\lambda) \approx b + c_2 n\left\{b_n + u_\alpha\sqrt{1-b_n^2} + \frac{u_\alpha^2 - 1}{24(1-b_n^2)}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4n^3}\right)\right\}^2 \tag{3.11}$$

を得る ([To96]).

実際に, (3.6)~(3.9), (3.11) から得られるパーセント点の近似値を比較してみると, 本論で提案した近似 (3.6) が他の近似よりも比較的良いことが分かる (表 3.1–3.3 参照).

4 非心 F 分布の近似

各 $i = 1, \cdots, p$ について, X_{ij} $(j = 1, \cdots, q)$ がたがいに独立にいずれも正規分布 $N(\mu_i, \sigma^2)$ に従う確率変数とする. このとき, 仮説 $H: \mu_i = \mu$ $(i = 1, \cdots, p)$ の検定問題において, 検定統計量として

$$T := q\sum_{i=1}^{p}\left(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot}\right)^2 / S^2$$

がよく用いられる. ただし,

$$\bar{X}_{i\cdot} := \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} X_{ij} \quad (i=1,\cdots,p), \quad \bar{X}_{\cdot\cdot} := \frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} X_{ij},$$

$$S^2 := \frac{1}{p(q-1)}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left(X_{ij}-\bar{X}_{i\cdot}\right)^2$$

とする. そして, 仮説 H が真でないとき, T は非心度 $q\sum_{i=1}^{p}(\mu_i-\bar{\mu})^2/\sigma^2$ の非心 F 分布に従うことが知られている. ただし, $\bar{\mu} := \sum_{i=1}^{p}\mu_i/p$ とする.

まず, 確率変数 $F_{\nu_1,\nu_2,\lambda}$ が, p.d.f.

$$f_{F_{\nu_1,\nu_2,\lambda}}(x) = \frac{e^{-\lambda/2}\nu_1^{\nu_1/2}\nu_2^{\nu_2/2}}{B(\nu_1/2,\nu_2/2)} x^{(\nu_1/2)-1}(\nu_2+\nu_1 x)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}$$
$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\lambda\nu_1 x}{2(\nu_2+\nu_1 x)}\right\}^k\left(\frac{1}{k!}\right)\frac{B(\nu_1/2,\nu_2/2)}{B\left(k+(\nu_1/2),\nu_2/2\right)}$$
$$(0<x<\infty\ ;\ \nu_1,\nu_2=1,2,\cdots;\lambda>0)$$

をもつとき, $F_{\nu_1,\nu_2,\lambda}$を 自由度 ν_1, ν_2, 非心度 λ をもつ非心 F 分布 $F(\nu_1,\nu_2;\lambda)$ に従う確率変数という. ただし, $B(\cdot,\cdot)$ はベータ関数とする. ここで, ν_1 が偶数のとき, $F_{\nu_1,\nu_2,\lambda}$ の c.d.f. は, $f>0$ について

$$F_{F_{\nu_1,\nu_2,\lambda}}(f) = P\left\{F_{\nu_1,\nu_2,\lambda}\le f\right\} = P\{Y-W\ge \nu_1/2\} \tag{4.1}$$

となる. ここで, Y, W は独立であり, Y は確率量関数 (p.m.f.)

$$f_Y(y) = \binom{y+(\nu_2/2)-1}{y}\left\{\frac{1}{1+(\nu_1 f/\nu_2)}\right\}^{\nu_2/2}\left\{\frac{\nu_1 f/\nu_2}{1+(\nu_1 f/\nu_2)}\right\}^y$$
$$(y=0,1,2,\cdots)$$

をもつ負の 2 項分布 $NB\left(\nu_2/2, 1/(1+(\nu_1 f/\nu_2))\right)$ に従い, W はポアソン分布 $Po(\lambda/2)$ に従うとする ([JKB95], [Ta75]). このとき, Y および W の積率母関数 (m.g.f.'s) は

$$g_Y(\theta) = \left(\frac{1-p}{1-pe^{\theta}}\right)^{\nu_2/2}, \quad g_W(\theta) = e^{(\lambda/2)(e^{\theta}-1)}$$

となる. これより, $Y-W$ の m.g.f. は

$$g_{Y-W}(\theta) = g_Y(\theta)g_W(-\theta) = \left(\frac{1-p}{1-pe^{\theta}}\right)^{\nu_2/2} e^{(\lambda/2)(e^{-\theta}-1)}$$

となる. ただし, $p=\nu_1 f/(\nu_2+\nu_1 f)$ とする. よって, $Y-W$ の c.g.f. は

$$K_{Y-W}(\theta) = \log g_{Y-W}(\theta) = -\frac{\nu_2}{2}\log\frac{1-pe^{\theta}}{1-p}+\frac{\lambda}{2}\left(e^{-\theta}-1\right)$$
$$= \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{\theta^j}{j!}-\frac{\nu_2}{2}\log\left(1-\frac{p}{1-p}(e^{\theta}-1)\right) \tag{4.2}$$

となる．ここで，$\mu := p/(1-p)$ とおけば，

$$\begin{aligned}
&-\log\left(1-\mu(e^{\theta}-1)\right)\\
&\quad=\mu(e^{\theta}-1)+\frac{\mu^2}{2}(e^{\theta}-1)^2+\frac{\mu^3}{3}(e^{\theta}-1)^3+\frac{\mu^4}{4}(e^{\theta}-\mu)^4+\cdots\\
&\quad=\mu\theta+\frac{1}{2}(\mu+\mu^2)\theta^2+\frac{1}{6}(\mu+3\mu^2+2\mu^3)\theta^3+\frac{1}{24}(\mu+7\mu^2+12\mu^3+6\mu^4)\theta^4+\cdots
\end{aligned}$$

となる．また，(4.2) より

$$\begin{aligned}
K_{Y-W}(\theta)=\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{\theta^j}{j!}+\frac{\nu_2}{2}\Bigg\{&\mu\theta+\frac{1}{2}(\mu+\mu^2)\theta^2+\frac{1}{6}(\mu+3\mu^2+2\mu^3)\theta^3\\
&+\frac{1}{24}(\mu+7\mu^2+12\mu^3+6\mu^4)\theta^4+\cdots\Bigg\}
\end{aligned}$$

となるので，$j=1,2,3,4$ について，$Y-W$ の j 次のキュムラント $\kappa_j(Y-W)$ は

$$\begin{aligned}
\kappa_1&=\kappa_1(Y-W)=-\frac{\lambda}{2}+\frac{\nu_1 f}{2},\\
\kappa_2&=\kappa_2(Y-W)=\frac{\lambda}{2}+\frac{\nu_1 f}{2}\left(1+\frac{\nu_1 f}{\nu_2}\right),\\
\kappa_3&=\kappa_3(Y-W)=-\frac{\lambda}{2}+\frac{\nu_1 f}{2}\left\{1+3\frac{\nu_1 f}{\nu_2}+2\left(\frac{\nu_1 f}{\nu_2}\right)^2\right\},\\
\kappa_4&=\kappa_4(Y-W)=\frac{\lambda}{2}+\frac{\nu_1 f}{2}\left\{1+7\frac{\nu_1 f}{\nu_2}+12\left(\frac{\nu_1 f}{\nu_2}\right)^2+6\left(\frac{\nu_1 f}{\nu_2}\right)^3\right\}
\end{aligned}$$

となる．よって，(4.1) より，$F_{\nu_1,\nu_2,\lambda}$ の c.d.f. の Edgeworth 展開によって，連続補正も考慮に入れて，

$$\begin{aligned}
F_{F_{\nu_1,\nu_2,\lambda}}(f)\approx 1-\Phi(z)+\phi(z)\Bigg\{&\frac{\kappa_3}{6\kappa_2^{3/2}}(z^2-1)+\frac{\kappa_4}{24\kappa_2^2}(z^3-3z)\\
&+\frac{\kappa_3^2}{72\kappa_2^3}(z^5-10z^3+15z)-\frac{1}{24\kappa_2}z\Bigg\}=:\tilde{F}_{F_{\nu_1,\nu_2,\lambda}}(f)
\end{aligned}$$

となる．ただし，

$$z=\frac{\nu_1-1+\lambda-\nu_1 f}{\sqrt{2\lambda+2\nu_1 f\left(1+(\nu_1/\nu_2)f\right)}}$$

である．これより，

$$\tilde{F}_{F_{\nu_1,\nu_2,\lambda}}(f)=1-\alpha \tag{4.3}$$

をみたす $f=f_\alpha$ により，非心 F 分布 $F(\nu_1,\nu_2;\lambda)$ の上側 100α パーセント点の近似値を求めることができる．また，$(2\nu_1/\nu_2)f_{1-(\alpha/2)}^2+3f_{1-(\alpha/2)}>1$ のとき，$1-\Phi(z)$ は λ に関して単調減少になるから，$0<\alpha<1$ について

$$\Phi\left(z_{1-(\alpha/2)}\right)=1-\frac{\alpha}{2},\quad \Phi\left(z_{\alpha/2}\right)=\frac{\alpha}{2}$$

となる λ をそれぞれ $\underline{\lambda}$, $\overline{\lambda}$ とすれば, 区間 $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ が漸近的に信頼係数 $1-\alpha$ の λ の信頼区間になる. ただし, $z_\alpha = (\nu_1 - 1 + \lambda - \nu_1 f_\alpha) / \sqrt{2\lambda + 2\nu_1 f_\alpha (1 + (\nu_1/\nu_2) f_\alpha)}$ とする.

一方, [To96] に従って, [Sh81] において紹介されている従来用いられてきたいくつかパーセント点の近似式について述べる ([JKB95]). いま, X_1 と X_2 はたがいに独立に, それぞれ非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu_1;\lambda)$, 中心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu_2)$ に従うとする. このとき,

$$F_{\nu_1,\nu_2,\lambda} := \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}$$

とおくと, 確率変数 $F_{\nu_1,\nu_2,\lambda}$ は非心 F 分布 $F(\nu_1,\nu_2;\lambda)$ に従う. ここで, ある定数 c_1 について, $X_1 = c_1 X_0$ とする. もし, X_0 が漸近的に $\chi^2(m)$ に従うとすれば, (3.8) より, $c_1 = (\nu_1+2\lambda)/(\nu_1+\lambda)$, $m = (\nu_1+\lambda)^2/(\nu_1+2\lambda)$ となる. よって, 十分大きい ν_1, ν_2 について

$$F_{\nu_1,\nu_2,\lambda} \approx \left(1 + \frac{\lambda}{\nu_1}\right) \frac{X_0/m}{X_2/\nu_2}$$

となるので,

$$P\{F_{\nu_1,\nu_2,\lambda} > f\} \approx P\left\{F_{m,\nu_2} > \frac{\nu_1 f}{\nu_1 + \lambda}\right\} \tag{4.4}$$

となる. ただし, F_{m,ν_2} は自由度 (m,ν_2) の中心 F 分布 $F(m,\nu_2)$ に従う確率変数であるとする ([Pa49]). ここで,

$$\begin{aligned} P\{F_{m,\nu_2} \le t\} &= P\left\{\frac{X_0/m}{X_2/\nu_2} \le t\right\} \\ &= P\left\{\left(\frac{X_0}{m}\right)^{1/3} - t^{1/3}\left(\frac{X_2}{\nu_2}\right)^{1/3} \le 0\right\} \end{aligned}$$

となる. ただし, X_0 は X_2 とは独立に中心 χ^2 分布 $\chi^2(m)$ に従う確率変数とする. よって, Wilson-Hilferty の近似より, 十分大きい ν_1, ν_2 について, $(X_0/m)^{1/3} - t^{1/3}(X_2/\nu_2)^{1/3}$ の分布は, 漸近的に平均 $1 - \{2/(9m)\} - t^{1/3}[1 - \{2/(9\nu_2)\}]$, 分散 $\{2/(9m)\} + t^{2/3}\{2/(9\nu_2)\}$ をもつ正規分布となり, Paulson の近似式と呼ばれる

$$P\{F_{m,\nu_2} \le t\} \approx \Phi\left(\frac{\left(1 - \frac{2}{9\nu_2}\right)t^{1/3} - \left(1 - \frac{2}{9m}\right)}{\sqrt{\frac{2}{9m} + t^{2/3}\cdot\frac{2}{9\nu_2}}}\right)$$

が得られる ([Sh81]). この Paulson の近似式を用いて, (4.4) より, 十分大きい ν_1, ν_2 について

$$P\{F_{\nu_1,\nu_2,\lambda} > f\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{(1-d)z^{1/3} - (1-a)}{\sqrt{a + dz^{2/3}}}\right) \tag{4.5}$$

を得る. ただし,

$$z = \frac{\nu_1 f}{\nu_1 + \lambda}, \quad a = \frac{2}{9m} = \frac{2(\nu_1 + 2\lambda)}{9(\nu_1+\lambda)^2}, \quad d = \frac{2}{9\nu_2}$$

とする ([SZ60]). さらに, $(F_{\nu_1,\nu_2,\lambda} - \rho)/\gamma$ の分布が漸近的に中心 F 分布 $F(\nu^*,\nu_2)$ とすれば, それら 1 次, 2 次および 3 次のキュムラントは漸近的に等しくなり, 十分大きい ν_1, ν_2 について

$$P\{F_{\nu_1,\nu_2,\lambda} > f\} \approx P\left\{F_{\nu^*,\nu_2} > \frac{f-\rho}{\gamma}\right\} \tag{4.6}$$

となる. ただし,

$$\nu^* = \frac{1}{2}(\nu_2 - 2)\left(\sqrt{\frac{H^2}{H^2 - 4K^3}} - 1\right),$$
$$\gamma = \frac{\nu^* H}{\nu_1(2\nu^* + \nu_2 - 2)K}, \quad \rho = \frac{\nu_2\left(1 + (\lambda/\nu_1) - \gamma\right)}{\nu_2 - 2}$$

であり, $H = 2(\nu_1+\lambda)^3 + 3(\nu_1+\lambda)(\nu_1+2\lambda)(\nu_2-2) + (\nu_1+3\lambda)(\nu_2-2)^2$, $K = (\nu_1+\lambda)^2 + (\nu_1 + 2\lambda)(\nu_2 - 2)$ である ([Ti65]).

また, [A95] の近似のアプローチと同様にして, [To96] では, 2 つのカイ確率変数の線形結合による統計量に対して Cornish-Fisher 展開を用いて, (4.6) から, 非心 F 分布についての近似式を提案している. 実際, まず, S を X_2 と独立に中心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu^*)$ に従う確率変数とし, 非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2; \lambda)$ の上側 100α パーセント点を f_α, さらに, $f'_\alpha := (f_\alpha - \rho)/\gamma$ とする. このとき, (4.6) より, 十分大きい ν_1, ν_2 について

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &\approx P\left\{\frac{S/\nu^*}{X_2/\nu_2} \le f'_\alpha\right\} \\
&= P\left\{\sqrt{\frac{S}{\nu^*}} - \sqrt{f'_\alpha}\sqrt{\frac{X_2}{\nu_2}} \le 0\right\} \\
&= P\left\{\frac{\sqrt{S/\nu^*} - b_{\nu^*} - \sqrt{f'_\alpha}\left(\sqrt{X_2/\nu_2} - b_{\nu_2}\right)}{\sqrt{1 - b^2_{\nu^*} + f'_\alpha(1 - b^2_{\nu_2})}} \le \frac{-b_{\nu^*} - \sqrt{f'_\alpha}b_{\nu_2}}{\sqrt{1 - b^2_{\nu^*} + f'_\alpha(1 - b^2_{\nu_2})}}\right\}
\end{aligned}$$

となる. さらに, $S_{\nu^*} := \sqrt{S/\nu^*}$, $S'_{\nu_2} := \sqrt{X_2/\nu_2}$ および

$$W := \frac{S_{\nu^*} - b_{\nu^*} - \sqrt{f'_\alpha}\left(S'_{\nu_2} - b_{\nu_2}\right)}{\sqrt{1 - b^2_{\nu^*} + f'_\alpha(1 - b^2_{\nu_2})}}$$

とすれば, $E(W) = 0$, $Var(W) = 1$ であることがわかる. ただし, $b_{\nu^*} := E\left(S_{\nu^*}\right)$, $b_{\nu_2} := E\left(S'_{\nu_2}\right)$ とする. よって, $O\left(\nu_1/\nu_2\right) = 1$ とし, 統計量 W の分布について Cornish-Fisher 展開を用いれば, 十分大きい ν_1, ν_2 について

$$\begin{aligned}
-\frac{b_{\nu^*} - \sqrt{f'_\alpha}b_{\nu_2}}{\sqrt{1 - b^2_{\nu^*} + f'_\alpha(1 - b^2_{\nu_2})}}
&= u_\alpha + \frac{u_\alpha^2 - 1}{24\left\{1 - b^2_{\nu^*} + f'_\alpha(1 - b^2_{\nu_2})\right\}^{3/2}}\left\{\frac{1}{\nu^{*2}} + \frac{1}{4\nu^{*3}} - {f'_\alpha}^{3/2}\left(\frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{4\nu_2^3}\right)\right\} \\
&\quad - \frac{2u_\alpha^3 - 5u_\alpha}{576\left\{1 - b^2_{\nu^*} + f'_\alpha(1 - b^2_{\nu_2})\right\}^3}\left(\frac{1}{\nu^{*2}} - \frac{{f'_\alpha}^{3/2}}{\nu_2^2}\right)^2 + O\left(\frac{1}{\nu_2^2}\right) \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

となる. ただし, $f'_\alpha = (f_\alpha - \rho)/\gamma$ は, 中心 F 分布 $F(\nu^*, \nu_2)$ の上側 100α パーセント点である ([To96]).

実際に, (4.3), (4.5)～(4.7) から得られるパーセント点の近似値を比較してみると, 本論で提案した近似 (4.3) は, 上側 1% 点を除けば他の近似よりも比較的良いことが分かる (表 4.1–4.3 参照).

5 標本相関係数の分布の近似

一般に, 相関係数の絶対値が 1 に近いときに標本相関係数の分布の近似はあまり良くなく, その近似式がいくつか提案されている ([NK84], [AT98]). ここでは, いくつかの新しい近似式の導出を試み, 数値的検討を行う.

5.1 カイ 2 乗確率変数の比による近似

確率ベクトル $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ がたがいに独立にいずれも 2 変量正規分布 $N_2(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ に従うとする. このとき, $|\rho|$ が 1 に近い場合に, 標本相関係数 $R := \sum_{i=1}^n X_i Y_i / \sqrt{(\sum_{i=1}^n X_i^2)(\sum_{i=1}^n Y_i^2)}$ の分布の近似を考える. まず, $\beta := \rho\sigma_2/\sigma_1$ とし,

$$Y_i = \beta X_i + U_i \quad (i = 1, \cdots, n)$$

とすると, 各 i について, U_i は X_i と独立に正規分布 $N(0, \sigma_2^2(1-\rho^2))$ に従う. ここで,

$$\hat{\beta} := \sum_{i=1}^n X_i Y_i \Bigg/ \sum_{i=1}^n X_i^2$$

とすれば, $\boldsymbol{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ を与えたときの $\hat{\beta}$ の条件付分布は $N\left(\beta, \sigma_2^2(1-\rho^2)/\sum_{i=1}^n X_i^2\right)$ となる. さらに,

$$\hat{\sigma}_U^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}X_i)^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2}\right\}$$

とすれば,

$$\begin{aligned} T := \frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}_U}\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2} &= \sqrt{n-1}\sum_{i=1}^n X_i Y_i \Bigg/ \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n X_i Y_i\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{n-1}R}{\sqrt{1-R^2}} \end{aligned} \tag{5.1}$$

となる. ただし, $\hat{\sigma}_U = \sqrt{\hat{\sigma}_U^2}$ とする. このとき, $\boldsymbol{X}$ を与えたときの T の条件付分布は自由度 $n-1$, 非心度

$$\delta := \frac{\rho}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2} \tag{5.2}$$

の非心 t 分布 $t(n-1; \delta)$ になる. よって, S_U^2, Z をそれぞれ自由度 $n-1$ の中心 χ^2 分布 $\chi^2(n-1)$, 標準正規分布 $N(0,1)$ に従うたがいに独立な確率変数とすれば,

$$T = \frac{Z+\delta}{S_U/\sqrt{n-1}} = \sqrt{n-1}\frac{Z+\delta}{S_U} \tag{5.3}$$

となる．ただし，$S_U := \sqrt{S_U^2}$ とする．また，

$$S_X^2 := \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

とすれば，これは中心 χ^2 分布 $\chi^2(n)$ に従う．よって，(5.1)∼ (5.3) より

$$\frac{T}{\sqrt{n-1}} = \frac{R}{\sqrt{1-R^2}} = \frac{1}{S_U}\left(Z + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}S_X\right)$$

であるから，標本相関係数 R の c.d.f. は

$$\begin{aligned} F_R(r) := P\{R \le r\} &= P\left\{\frac{R}{\sqrt{1-R^2}} \le \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\right\} \\ &= P\left\{Z + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}S_X \le \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}S_U\right\} \end{aligned} \tag{5.4}$$

となる．ただし，$S_X := \sqrt{S_X^2}$ とする．さらに，

$$\xi := \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}, \quad t := \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

とすれば，(5.4) より

$$F_R(r) = P\left\{Z + \xi S_X \le tS_U\right\} \tag{5.5}$$

となる．ここで，$|r|$ が 1 に近く，$|t|$ が大きい場合を考える．まず，S_X^2, Z をたがいに独立として，

$$S_V^2 := Z^2 + S_X^2, \quad W := Z/S_V$$

とすると，S_V^2 は W と独立に中心 χ^2 分布 $\chi^2(n+1)$ に従う ([A03] p.236 の問 9 参照)．ただし，$S_V := \sqrt{S_V^2}$ とする．このとき，(5.5) より

$$\begin{aligned} F_R(r) &= P\left\{S_U \ge \frac{Z}{t} + \frac{\xi}{t}S_X\right\} \\ &= P\left\{\frac{S_U}{S_V} \ge \frac{1}{t}W + \frac{\xi S_X}{tS_V}\right\} \\ &= P\left\{\frac{S_U}{S_V} \ge \frac{1}{t}W + \frac{\xi}{tS_V}\sqrt{S_V^2 - Z^2}\right\} \\ &= P\left\{\frac{S_U}{S_V} \ge \frac{1}{t}W + \frac{\xi}{t}\sqrt{1-W^2}\right\} \end{aligned} \tag{5.6}$$

となる．さらに，

$$M_t := \frac{1}{t}W + \frac{\xi}{t}\sqrt{1-W^2} \tag{5.7}$$

とすれば, $S_U/S_V > 0$ であり, (5.6), (5.7) より

$$F_R(r) = P\left\{\frac{S_U}{S_V} \geq M_t\right\} = P\left\{\left(\frac{S_U}{S_V}\right)^2 > M_t^2\right\} + P\left\{M_t \leq -\frac{S_U}{S_V}\right\} \tag{5.8}$$

となる. よって, 十分大きい t について, (5.8) の右辺の第 2 項はほとんど 0 となり,

$$F_R(r) \approx P\left\{\frac{S_U^2}{S_V^2} > M_t^2\right\} \tag{5.9}$$

となる. ここで,

$$G(u) := P\left\{\frac{S_U^2}{S_V^2} > u\right\}$$

とすれば, (5.9) より, 十分大きい t について

$$F_R(r) \approx E\left[G\left(M_t^2\right)\right] \tag{5.10}$$

となる. さらに, $\mu := E\left(M_t^2\right)$ とすれば, Taylor 展開により (5.10) から

$$F_R(r) \approx G(\mu) + \frac{1}{2}G^{(2)}(\mu)E\left[\left(M_t^2 - \mu\right)^2\right] + \frac{1}{6}G^{(3)}(\mu)E\left[\left(M_t^2 - \mu\right)^3\right] \tag{5.11}$$

となる. ここで, S_U^2, S_V^2 はたがいに独立にそれぞれ中心 χ^2 分布 $\chi^2(n-1)$, $\chi^2(n+1)$ に従う確率変数であるから,

$$G(u) = \int_u^\infty g(v)dv = \int_u^\infty \frac{1}{B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)} \frac{v^{(n-3)/2}}{(1+v)^n}dv \tag{5.12}$$

となる. ただし, g は S_U^2/S_V^2 の p.d.f. であり, $B(\cdot,\cdot)$ はベータ関数とする. また, $G^{(1)}(u) = -g(u)$ であり,

$$G^{(2)}(u) = -\frac{1}{B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)(1+u)^{n+1}} u^{(n-5)/2}\left(\frac{n-3}{2} - \frac{n+3}{2}u\right) \tag{5.13}$$

である. さらに, W^2 はベータ分布 $Be(1/2, n/2)$ に従うので,

$$E\left(W^2\right) = \frac{1}{n+1}, \quad E\left[W\sqrt{1-W^2}\right] = 0,$$
$$Var\left(W^2\right) = \frac{2n}{(n+1)^2(n+3)}, \quad E\left(W^4\right) = \frac{3}{(n+1)(n+3)}$$

になり, そして,

$$\begin{aligned} \mu = E\left(M_t^2\right) &= E\left[\left(\frac{1}{t}W + \frac{\xi}{t}\sqrt{1-W^2}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{t^2(n+1)} + \frac{\xi^2}{t^2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1+n\xi^2}{t^2(n+1)}, \qquad (5.14) \\ Var\left(M_t^2\right) &= E\left[\left(M_t^2 - \mu\right)^2\right] = E\left(M_t^4\right) - \mu^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{n}{(n+1)^2(n+3)t^4}\left\{2+2n\xi^2-(n^2+2n-2)\xi^4\right\} \tag{5.15}$$

になる．よって，(5.11)〜(5.15) より，標本相関係数 R の c.d.f. の近似式

$$F_R(r) \approx G(\mu) + \frac{1}{2}G^{(2)}(\mu)Var\left(M_t^2\right) =: \tilde{F}_R(r)$$

を得る．ただし，G, $G^{(2)}$, μ, $Var\left(M_t^2\right)$ はそれぞれ (5.12), (5.13), (5.14), (5.15) で与えられるものとする．このとき，$0<\alpha<1$ について

$$\tilde{F}_R(r) = 1-\alpha \tag{5.16}$$

となるような $r=r_\alpha$ を得れば，この r_α は標本相関係数の分布の上側 100α パーセント点の近似値となる．

5.2 カイ確率変数の比による近似

まず，(5.5) より R の c.d.f. は

$$F_R(r) = P\{R \le r\} = P\{Z+\xi S_X - tS_U \le 0\}$$

になる．いま，$t>\xi$ で t が大きい場合を考える．ここで，$S_V^2 := S_X^2 + Z^2$, $W := Z/S_V$ とすれば，S_V^2 は W と独立に中心 χ^2 分布 $\chi^2(n+1)$ に従う．このとき，(5.6) より

$$F_R(r) = P\left\{\frac{S_U}{S_V} \ge \frac{1}{t}\left(\xi\sqrt{1-W^2}+W\right)\right\}$$

となる．ここで，

$$H(u) := P\left\{\frac{S_U}{S_V} \ge u\right\} = \int_u^\infty h(x)dx,$$
$$h(x) = \frac{2}{B\left(\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}\right)}\frac{x^{n-2}}{(1+x^2)^n} \quad (x>0)$$

とする．さらに，$M_1 := \xi\sqrt{1-W^2}+W$, $\mu := E(M_1)$, $\mu_k := E\left[(M_1-\mu)^k\right]$ $(k=2,3,\cdots)$ とすれば，$H^{(1)}(u) = -h(u)$ より，$t>\xi$ になる十分大きい t について

$$\begin{aligned} F_R(r) &\approx E\left[H\left(\frac{\mu}{t}\right) + \frac{1}{2}H^{(2)}\left(\frac{\mu}{t}\right)\left(\frac{M_1}{t}-\frac{\mu}{t}\right)^2 + \frac{1}{6}H^{(3)}\left(\frac{\mu}{t}\right)\left(\frac{M_1}{t}-\frac{\mu}{t}\right)^2\right] \\ &= H\left(\frac{\mu}{t}\right) - \frac{\mu_2}{2t^2}h^{(1)}\left(\frac{\mu}{t}\right) - \frac{\mu_3}{6t^3}h^{(2)}\left(\frac{\mu}{t}\right) \end{aligned} \tag{5.17}$$

となる．また，Z^2 と S_X^2 はたがいに独立にそれぞれ中心 χ^2 分布 $\chi^2(1)$, $\chi^2(n)$ に従う確率変数であるから，

$$W^2 = \frac{Z^2}{S_V^2} = \frac{Z^2}{Z^2+S_X^2}$$

は S_V^2 と独立になり，

$$E(W^k) = E\left[\left(\frac{Z}{S_V}\right)^k\right] = \frac{E(Z^k)}{E(S_V^k)} \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{5.18}$$

となる．これと同様にして，$S_X^2/S_V^2 = S_X^2/(S_X^2 + Z^2)$ は S_V^2 と独立になるから，

$$E\left[\left(\frac{S_X}{S_V}\right)^k\right] = \frac{E\left(S_X^k\right)}{E\left(S_V^k\right)} \tag{5.19}$$

となる．さらに，(5.19) より

$$\begin{aligned}\mu = E(M_1) &= E(W) + \xi E\left(\sqrt{1-W^2}\right) = \xi E\left[\sqrt{1 - \frac{Z^2}{S_V^2}}\right] \\ &= \xi E\left(\frac{S_X}{S_V}\right) = \xi \frac{E(S_X)}{E(S_V)} = \xi \frac{c_n}{c_{n+1}}\end{aligned} \tag{5.20}$$

となる．ただし，

$$E(S_X) = \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} =: c_n$$

である．ここで，一般に中心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu)$ に従う確率変数 S^2 について，

$$E\left(S^{2k}\right) = \nu(\nu+2)\cdots(\nu+2k-2) \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

であるから，(5.18) より

$$\begin{aligned}E\left(M_1^2\right) &= E\left[\left(\xi\sqrt{1-W^2} + W\right)^2\right] = \xi^2 + \left(1-\xi^2\right) E\left(W^2\right) \\ &= \xi^2 + \left(1-\xi^2\right) \frac{E\left(Z^2\right)}{E\left(S_V^2\right)} \\ &= \frac{n}{n+1}\xi^2 + \frac{1}{n+1}\end{aligned} \tag{5.21}$$

となる．よって，(5.20)，(5.21) より

$$\mu_2 = E\left[(M_1 - \mu)^2\right] = \left(\frac{n}{n+1} - \frac{c_n^2}{c_{n+1}^2}\right)\xi^2 + \frac{1}{n+1}$$

となる．また，

$$h^{(k)}(u) := \frac{d^k}{du^k}h(u) = \frac{2}{B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{l_k(u)}{(1+u^2)^{n+k}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

とすれば，

$$h^{(0)}(u) = h(u)$$

より, $l_0(u) = u^{n-2}$ であり, そして

$$h^{(k+1)}(u) = \frac{d}{du}h^{(k)}(u)$$
$$= \frac{2}{B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{\left(1+u^2\right) l_k^{(1)}(u) - 2(n+k)ul_k(u)}{(1+u^2)^{n+k+1}}$$

になるので,

$$l_{k+1}(u) = -2(n+k)ul_k(u) + (1+u^2)l_k^{(1)}(u) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{5.22}$$

となる. ここで, 十分小さい δ について $F_R(r) \approx H\left((\mu/t) + \delta\right)$ とできれば, Taylor 展開により,

$$H\left(\frac{\mu}{t} + \delta\right) \approx H\left(\frac{\mu}{t}\right) - \delta h\left(\frac{\mu}{t}\right) \tag{5.23}$$

になる. さらに, (5.17) の右辺の第 2 項を (5.23) のそれと等値すれば,

$$\frac{\mu_2}{2t^2}h^{(1)}\left(\frac{\mu}{t}\right) = \delta h\left(\frac{\mu}{t}\right)$$

になるから,

$$\delta = \frac{h^{(1)}(\mu/t)\mu_2}{2h(\mu/t)t^2} = \frac{l_1\left(\frac{\mu}{t}\right)}{l_0\left(\frac{\mu}{t}\right)\left(1+\frac{\mu^2}{t^2}\right)} \cdot \frac{\mu_2}{t^2}$$

になる. また, (5.22) より

$$\frac{l_1(u)}{l_0(u)} = \frac{1}{u^{n-2}}\left\{-2nul_0(u) + \left(1+u^2\right) l_0^{(1)}(u)\right\} = -(n+2)u + \frac{n-2}{u}$$

となるから,

$$\delta = \left\{-(n+2)\frac{\mu}{t} + \frac{n-2}{\mu/t}\right\} \frac{\mu_2}{t^2+\mu^2} \tag{5.24}$$

になる. よって, (5.17), (5.23) および (5.24) より

$$F_R(r) \approx H\left(\frac{\mu}{t}\right) - \delta h\left(\frac{\mu}{t}\right)$$

となる.

5.3 極座標変換を用いた近似

まず,

$$\eta^2 := t^2 + \xi^2, \quad S_W^2 := S_U^2 + S_X^2,$$
$$\sin\alpha := \frac{S_U}{S_W}, \quad \sin\beta := \frac{\xi}{\eta}$$

とおくと, (5.5) より

$$F_R(r) = P\{tS_U - \xi S_X \geq Z\} = P\left\{\frac{tS_U}{\eta S_W} - \frac{\xi S_X}{\eta S_W} \geq \frac{Z}{\eta S_W}\right\} \tag{5.25}$$

となる. また,

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{\eta^2} + \frac{\xi^2}{\eta^2} &= \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1,\\ \frac{S_U^2}{S_W^2} + \frac{S_X^2}{S_W^2} &= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\end{aligned}$$

より, (5.25) から

$$\begin{aligned}F_R(r) &= P\left\{\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \geq \frac{Z}{\eta S_W}\right\}\\ &= P\left\{\sin(\alpha-\beta) \geq \frac{Z}{\eta S_W}\right\}\\ &= P\left\{\alpha \geq \beta + \sin^{-1}\frac{Z}{\eta S_W}\right\}\end{aligned} \tag{5.26}$$

となる. ここで,

$$\varepsilon := \sin^{-1}\frac{Z}{\eta S_W}$$

とおけば, (5.26) より

$$\begin{aligned}F_R(r) &= P\left\{\alpha \geq \beta + \sin^{-1}\frac{Z}{\eta S_W}\right\} = P\{\alpha \geq \beta + \varepsilon\}\\ &= E\left[G_\alpha(\beta+\varepsilon)\right]\\ &\approx G_\alpha(\beta) - f_\Theta(\beta)E(\varepsilon) - \frac{1}{2}f_\Theta^{(1)}(\beta)E\left(\varepsilon^2\right) - \frac{1}{6}f_\Theta^{(2)}(\beta)E\left(\varepsilon^3\right)\end{aligned} \tag{5.27}$$

となる. ただし,

$$G_\alpha(t) := P\{\alpha \geq t\}$$

とする. いま, Z と S_W^2 はたがいに独立にそれぞれ $N(0,1)$, 中心 χ^2 分布 $\chi^2(2n-1)$ に従う確率変数であるので, (Z, S_W) の j.p.d.f. は

$$f_{Z,S_W}(z,u) = \begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi}2^{n-1}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}u^{2(n-1)}e^{-\left(z^2+u^2\right)/2} & (-\infty < z < \infty,\ u > 0),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases} \tag{5.28}$$

となる. ここで, $y = z/(\eta u)$, $v = u$ として変数変換すると, (5.28) より (Y, V) の j.p.d.f. は

$$f_{Y,V}(y,v) = \begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{v^2}{2}\right)^{n-1}e^{-(1+\eta^2y^2)v^2/2}\eta v & (-\infty < y < \infty,\ v > 0),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

となる．よって，変数変換 $t=\left(1+\eta^2y^2\right)v^2/2$ により，Y の周辺 p.d.f. は

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{\eta}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty \left(\frac{v^2}{2}\right)^{n-1} e^{-\left(1+\eta^2y^2\right)v^2/2} v dv \\
&= \frac{\eta}{B\left(\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}\right)\left(1+\eta^2y^2\right)^n} \quad (-\infty < y < \infty)
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

となる．ここで，$\varepsilon=\sin^{-1}\left(Z/\left(\eta S_W\right)\right)$ であるので，$\left|Z/\left(\eta S_W\right)\right|\leq 1$ でなければならない．しかし，η, n がともに大きいとすれば，$\left|Z/\left(\eta S_W\right)\right|>1$ の確率はほとんど 0，すなわち

$$
P\left\{\left|\frac{Z}{\eta S_W}\right| \leq 1\right\} \approx 1
$$

となる．また，$\sin^{-1} y$ は奇関数で $f_Y(y)$ は偶関数だから，

$$
E\left(\varepsilon^{2k-1}\right)=0 \quad (k=1,2,\cdots) \tag{5.30}
$$

になる．ここで，$Y_1 := S_U^2$, $Y_2 := S_X^2$ とすると，Y_1, Y_2 はたがいに独立にそれぞれ中心 χ^2 分布 $\chi^2(n-1)$, $\chi^2(n)$ に従うので，(Y_1, Y_2) の j.p.d.f. は

$$
f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \begin{cases} \frac{1}{4\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{y_1}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{y_2}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(y_1+y_2)} & (y_1>0,\ y_2>0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{5.31}
$$

となる．そして，変数変換 $y_1=r^2\cos^2\theta$, $y_2=r^2\sin^2\theta$ $(0\leq\theta\leq\pi/2)$ をすると，(5.31) より (R,Θ) の j.p.d.f. は

$$
f_{R,\Theta}(r,\theta) = \begin{cases} \frac{r^{2n-2}}{2^{n-(5/2)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\cos^{n-2}\theta\sin^{n-1}\theta\right)e^{-r^2/2} & (0\leq\theta\leq\pi/2,\ r>0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

となる．よって，Θ の周辺 p.d.f. は

$$
f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{B\left(\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}\right)}\cos^{n-2}\theta\sin^{n-1}\theta & (0\leq\theta\leq\pi/2), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{5.32}
$$

となる．このとき，

$$
G_\alpha(t)=P\{\alpha\geq t\}=P\{\Theta\geq t\}=\int_t^{\frac{\pi}{2}} f_\Theta(\theta)d\theta
$$

になる．また，(5.29) より

$$
\begin{aligned}
E\left(\varepsilon^2\right) &= E\left[\left(\sin^{-1}Y\right)^2\right] = E\left(Y^2\right)+\frac{1}{3}E\left(Y^4\right)+\frac{8}{45}E\left(Y^6\right)+O\left(\frac{1}{n^4}\right) \\
&= \frac{1}{(2n-3)\eta^2}+\frac{1}{(2n-3)(2n-5)\eta^4}+\frac{8}{3(2n-3)(2n-5)(2n-7)\eta^6}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)
\end{aligned} \tag{5.33}
$$

となり，そして同様にして，

$$
E\left(\varepsilon^4\right)=\frac{3}{(2n-3)(2n-5)\eta^4}+\frac{10}{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\eta^6}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)
$$

となる．一般に, (5.29) より

$$E\left(\varepsilon^{2k}\right)=\int_0^{\eta^2/(1+\eta^2)}\left\{\sin^{-1}\left(\frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right)\right\}^{2k}\frac{1}{B\left(\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}\right)}t^{-1/2}(1-t)^{n-(3/2)}dt \quad (k=1,2,\cdots) \tag{5.34}$$

となる．一方, (5.32) より

$$f_\Theta^{(1)}(\theta)=\frac{2}{B\left(\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}\right)}\cos^{n-2}\theta\sin^{n-1}\theta\left\{-(n-2)\tan\theta+(n-1)\cot\theta\right\} \quad \left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right) \tag{5.35}$$

である．よって, (5.27), (5.30), (5.32)~(5.35) より, 十分大きい n について

$$\begin{aligned}F_R(r)=P\{R\le r\}\approx\int_\beta^{\frac{\pi}{2}}&f_\Theta(\theta)d\theta\\&-\frac{1}{B\left(\frac{n-1}{2},\frac{n}{2}\right)}\cos^{n-2}\beta\sin^{n-1}\beta\left\{-(n-2)\tan\beta+(n-1)\cot\beta\right\}\\&\cdot\left\{\frac{1}{(2n-3)\eta^2}+\frac{1}{(2n-3)(2n-5)\eta^4}+\frac{8}{3(2n-3)(2n-5)(2n-7)\eta^6}\right\}\end{aligned}$$

となる．

また, Akahira and Torigoe [AT98] において, そこで提案した近似式を従来良く使われてきた近似式と数値比較して, 従来のものよりも良い近似であることを示している．ここでは, (5.16), (5.17) および (5.27) から得られるパーセント点の近似値を比較した．その結果, いずれも良い近似になっていて, 特に (5.17) が他のものよりも良いことが分かる (表 5.1–5.9 参照).

6 おわりに

本論において, 非心度が大きいときに, 非心 t 分布, 非心カイ 2 乗分布, 非心 F 分布について, 新たな近似を提案した．また, 同様の観点から, 相関係数の絶対値が大きいときの標本相関係数の分布についても新たな近似を提案した．

実際, 非心分布の近似について, 一般に分布表等で値が与えられている分布のパーセント点をここでは真値とみなし, 非心分布の近似式によるパーセント点の近似値や, これまでに提案された近似式による近似値を比較検討した．その結果, 本論において提案した近似の精度が多くの場合において従来の近似より良いことを確認した．なお, 非心 F 分布については, 上側 1 パーセント点の近似において, その精度があまり良くないことも分かった．これについてはまだ改良の余地があると思われる．本論では, 提案した非心分布の近似を分布のパーセント点を通してその精確性を調べたが, その他に, ある区間に落ちる確率の近似値等を通しても比較できるであろう．また, この近似の推測への応用としては, 区間推定, 検定等が挙げられる．

表 2.1 : $t(\nu;\delta)$ の上側 10% 点の近似相対誤差 $(\times 10^{-4})$ $(\eta := \delta/\sqrt{2\nu+\delta^2})$

ν	η	δ	真値	(2.4) up to $t^{-4}G_S^{(4)}$	(2.4) up to $t^{-6}G_S^{(6)}$	[A95] (2.5)
4	0.99	19.850	38.588	0	0	−43
	0.98	13.929	27.146	0	0	−41
	0.97	11.286	22.050	0	0	−39
	0.96	9.6975	18.997	0	0	−38
	0.95	8.6053	16.903	0	0	−36
	0.94	7.7929	15.349	0	0	−34
	0.93	7.1565	14.135	0	0	−33
	0.92	6.6395	13.151	0	0	−31
	0.91	6.2080	12.332	0	0	−30
	0.90	5.8400	11.636	0	0	−28
7	0.99	26.259	41.370	0	0	−17
	0.98	18.427	29.098	0	0	−16
	0.97	14.929	23.632	0	0	−16
	0.96	12.829	20.356	0	0	−15
	0.95	11.384	18.108	0	0	−14
	0.94	10.309	16.440	0	0	−14
	0.93	9.4672	15.136	0	0	−13
	0.92	8.7833	14.080	0	0	−13
	0.91	8.2124	13.200	−1	0	−12
	0.90	7.7256	12.452	−1	0	−12
10	0.99	31.385	45.090	0	0	−9
	0.98	22.024	31.708	0	0	−9
	0.97	17.844	25.746	0	0	−9
	0.96	15.333	22.172	0	0	−8
	0.95	13.606	19.720	0	0	−8
	0.94	12.322	17.899	0	0	−8
	0.93	11.315	16.476	0	0	−7
	0.92	10.498	15.322	0	0	−7
	0.91	9.8156	14.362	0	0	−7
	0.90	9.2338	13.544	−1	0	−6

表 2.2 : $t(\nu;\delta)$ の上側 5% 点の近似相対誤差 ($\times 10^{-4}$) $\left(\eta := \delta/\sqrt{2\nu+\delta^2}\right)$

ν	η	δ	真値	(2.4) up to $t^{-4}G_S^{(4)}$	(2.4) up to $t^{-6}G_S^{(6)}$	[A95] (2.5)
4	0.99	19.850	47.227	0	0	54
	0.98	13.929	33.238	0	0	54
	0.97	11.286	27.011	0	0	54
	0.96	9.6975	23.282	0	0	55
	0.95	8.6053	20.725	0	0	55
	0.94	7.7929	18.828	0	0	55
	0.93	7.1565	17.347	0	0	55
	0.92	6.6395	16.148	0	0	55
	0.91	6.2080	15.150	0	0	55
	0.90	5.8400	14.301	0	0	55
7	0.99	26.259	47.321	0	0	13
	0.98	18.427	33.300	0	0	13
	0.97	14.929	27.058	0	0	13
	0.96	12.829	23.318	0	0	13
	0.95	11.384	20.754	0	0	13
	0.94	10.309	18.851	0	0	13
	0.93	9.4672	17.366	0	0	13
	0.92	8.7833	16.162	0	0	13
	0.91	8.2124	15.160	0	0	13
	0.90	7.7256	14.308	0	0	13
10	0.99	31.385	50.127	0	0	6
	0.98	22.024	35.267	0	0	6
	0.97	17.844	28.649	0	0	6
	0.96	15.333	24.684	0	0	6
	0.95	13.606	21.964	0	0	6
	0.94	12.322	19.946	0	0	6
	0.93	11.315	18.370	0	0	6
	0.92	10.498	17.092	0	0	6
	0.91	9.8156	16.029	0	0	6
	0.90	9.2338	15.124	0	0	6

表 2.3 : $t(\nu;\delta)$ の上側 1% 点の近似相対誤差 $(\times 10^{-4})$ $\left(\eta := \delta/\sqrt{2\nu+\delta^2}\right)$

ν	η	δ	真値	(2.4) up to $t^{-4}G_S^{(4)}$	(2.4) up to $t^{-6}G_S^{(6)}$	[A95] (2.5)
4	0.99	19.850	73.081	0	0	848
	0.98	13.929	51.462	0	0	841
	0.97	11.286	41.843	0	0	834
	0.96	9.6975	36.085	0	0	826
	0.95	8.6053	32.139	0	0	818
	0.94	7.7929	29.214	0	0	811
	0.93	7.1565	26.931	0	0	803
	0.92	6.6395	25.083	0	0	795
	0.91	6.2080	23.546	0	0	787
	0.90	5.8400	22.240	0	0	780
7	0.99	26.259	62.628	0	0	215
	0.98	18.427	44.101	0	0	212
	0.97	14.929	35.858	0	0	208
	0.96	12.829	30.924	0	0	205
	0.95	11.384	27.542	0	0	202
	0.94	10.309	25.035	0	0	199
	0.93	9.4672	23.078	0	0	196
	0.92	8.7833	21.494	0	0	193
	0.91	8.2124	20.176	0	0	190
	0.90	7.7256	19.056	0	0	187
10	0.99	31.385	62.254	0	0	100
	0.98	22.024	43.830	0	0	98
	0.97	17.844	35.631	0	0	96
	0.96	15.333	30.721	0	0	94
	0.95	13.606	27.356	0	0	92
	0.94	12.322	24.861	0	0	91
	0.93	11.315	22.913	0	0	89
	0.92	10.498	21.335	0	0	87
	0.91	9.8156	20.023	1	0	85
	0.90	9.2338	18.907	1	0	84

表 3.1 : $\chi^2(\nu;\lambda)$ の上側 10% 点の近似相対誤差 ($\times 10^{-4}$)

ν	λ	真値	(3.6)	[To96] (3.11)	[Sa63] (3.7)	[Pa49] (3.8)	[Pe59] (3.9)
10	10	30.3504	3	−15	−7	−2	−10
	20	43.2959	1	−10	−3	5	−7
	30	55.6728	0	−7	−2	7	−5
	40	67.7211	0	−6	−1	9	−4
	50	79.5483	0	−5	−1	9	−3
	100	136.835	0	−2	0	8	−1
15	10	36.1409	2	−9	−6	0	−6
	20	48.9137	1	−8	−3	4	−5
	30	61.1977	0	−6	−2	6	−4
	40	73.1857	0	−5	−1	7	−3
	50	84.9696	0	−4	−1	8	−3
	100	142.142	0	−2	0	7	−1
20	10	41.8780	2	−6	−4	1	−3
	20	54.5052	1	−6	−3	3	−4
	30	66.7062	0	−5	−2	5	−3
	40	78.6388	0	−4	−1	6	−3
	50	90.3823	0	−3	−1	7	−2
	100	147.446	0	−2	0	7	−1
30	10	53.2271	1	−3	−3	1	−2
	20	65.6207	1	−4	−2	2	−2
	30	77.6793	0	−3	−1	4	−2
	40	89.5135	0	−3	−1	5	−2
	50	101.184	0	−3	−1	5	−2
	100	158.044	0	−1	0	6	−1
40	10	64.4482	1	−2	−2	1	−1
	20	76.6609	0	−2	−2	2	−1
	30	88.6014	0	−2	−1	3	−1
	40	100.351	0	−2	−1	3	−1
	50	111.956	0	−2	−1	4	−1
	100	168.629	0	−1	0	5	−1
50	10	75.5719	1	−1	−1	0	0
	20	87.6392	0	−2	−1	1	−1
	30	99.4796	0	−2	−1	2	−1
	40	111.154	0	−2	−1	3	−1
	50	122.702	0	−2	−1	3	−1
	100	179.202	0	−1	0	4	−1

表 3.2 : $\chi^2(\nu;\lambda)$ の上側 5% 点の近似相対誤差 ($\times 10^{-4}$)

ν	λ	真値	(3.6)	[To96] (3.11)	[Sa63] (3.7)	[Pa49] (3.8)	[Pe59] (3.9)
10	10	34.0886	2	−4	−3	34	−6
	20	47.8997	1	−3	−1	45	−4
	30	60.9634	0	−2	0	45	−3
	40	73.5996	0	−2	0	43	−2
	50	85.9494	0	−1	0	40	−2
	100	145.312	0	0	0	29	−1
15	10	40.0756	2	−2	−3	21	−4
	20	53.6727	1	−2	−1	32	−3
	30	66.6216	0	−2	0	35	−2
	40	79.1832	0	−1	0	35	−2
	50	91.4795	0	−1	0	34	−1
	100	150.700	0	0	0	26	−1
20	10	46.0004	1	−1	−2	14	−2
	20	59.4148	1	−1	−1	24	−2
	30	72.2604	0	−1	−1	28	−2
	40	84.7532	0	−1	0	29	−1
	50	96.9992	0	−1	0	29	−1
	100	156.084	0	0	0	24	−1
30	10	57.7014	1	0	−1	7	−1
	20	70.8191	0	−1	−1	14	−1
	30	83.4860	0	−1	−1	18	−1
	40	95.8556	0	−1	0	20	−1
	50	108.010	0	−1	0	21	−1
	100	166.840	0	0	0	20	0
40	10	69.2477	1	0	−1	4	−1
	20	82.1332	0	0	−1	9	−1
	30	94.6504	0	0	−1	13	−1
	40	106.913	0	0	0	15	−1
	50	118.986	0	−1	0	16	−1
	100	177.581	0	0	0	17	0
50	10	80.6747	1	0	−1	3	0
	20	93.3722	0	0	−1	6	0
	30	105.762	0	0	0	9	−1
	40	117.930	0	0	0	11	−1
	50	129.929	0	0	0	12	0
	100	188.308	0	0	0	14	0

表 3.3 : $\chi^2(\nu;\lambda)$ の上側 1% 点の近似相対誤差 $(\times 10^{-4})$

ν	λ	真値	(3.6)	[To96] (3.11)	[Sa63] (3.7)	[Pa49] (3.8)	[Pe59] (3.9)
10	10	41.7680	−4	37	12	116	9
	20	57.2192	−2	26	8	137	9
	30	71.5784	−1	19	5	132	8
	40	85.3216	−1	15	4	123	7
	50	98.6545	0	12	3	113	6
	100	161.917	0	6	1	79	3
15	10	48.1047	−3	26	9	70	6
	20	63.2698	−1	20	6	97	7
	30	77.4762	−1	16	4	102	6
	40	91.1199	−1	13	3	100	5
	50	104.381	0	11	3	95	5
	100	167.453	0	5	1	72	3
20	10	54.3659	−2	19	7	46	4
	20	69.2826	−1	16	5	72	5
	30	83.3500	−1	13	4	81	5
	40	96.9012	0	11	3	82	5
	50	110.095	0	9	2	80	4
	100	172.983	0	5	1	65	3
30	10	66.7029	−1	12	5	23	2
	20	81.2088	−1	11	4	43	3
	30	95.0324	−1	10	3	53	3
	40	108.416	0	8	3	58	3
	50	121.486	0	7	2	59	3
	100	184.029	0	4	1	54	2
40	10	78.8419	−1	8	3	13	1
	20	93.0206	−1	8	3	27	2
	30	106.637	0	7	3	36	2
	40	119.874	0	7	2	42	2
	50	132.832	0	6	2	45	2
	100	195.055	0	4	1	46	2
50	10	90.8246	−1	6	3	8	1
	20	104.735	0	6	2	19	1
	30	118.174	0	6	2	26	2
	40	131.281	0	5	2	31	2
	50	144.137	0	5	2	35	2
	100	206.062	0	3	1	39	2

表 4.1 : $F(\nu_1, \nu_2; \lambda)$ の上側 10% 点の近似相対誤差 ($\times 10^{-4}$)

$\sqrt{\lambda/\nu_1}$	λ	ν_1	ν_2	真値	(4.3)	[To96] (4.7)	[SZ60] (4.5)	[Ti65] (4.6)
1	3	3	80	4.0571	33	−34	−96	−68
			90	4.0407	32	−35	−97	−69
			100	4.0277	31	−35	−97	−70
	5	5	80	3.6296	15	−19	−42	−33
			90	3.6123	14	−20	−42	−34
			100	3.5985	14	−20	−42	−35
	10	10	80	3.2061	6	−7	−11	−12
			90	3.1870	5	−7	−11	−12
			100	3.1717	5	−8	−11	−12
	20	20	80	2.9222	3	−2	−2	−3
			90	2.9006	3	−2	−1	−4
			100	2.8832	2	−2	−1	−4
$\sqrt{2}$	6	3	80	5.6927	14	−30	−66	−47
			90	5.6673	14	−30	−66	−48
			100	5.6470	13	−30	−66	−48
	10	5	80	5.1398	7	−15	−25	−22
			90	5.1127	6	−15	−25	−22
			100	5.0911	6	−15	−24	−23
	20	10	80	4.6023	3	−5	−4	−7
			90	4.5720	3	−5	−4	−7
			100	4.5477	2	−5	−4	−8
	40	20	80	4.2486	2	−1	0	−2
			90	4.2143	1	−1	1	−2
			100	4.1866	1	−2	1	−2
2	12	3	80	8.6891	6	−17	−29	−24
			90	8.6442	5	−17	−28	−25
			100	8.6084	5	−18	−28	−25
	20	5	80	7.9632	3	−8	−8	−10
			90	7.9148	3	−8	−7	−11
			100	7.8761	2	−8	−7	−11
	40	10	80	7.2711	2	−2	1	−3
			90	7.2164	1	−2	1	−3
			100	7.1725	1	−2	1	−3
	80	20	80	6.8275	1	0	1	−1
			90	6.7655	1	−1	2	−1
			100	6.7156	1	−1	2	−1

表 4.2 : $F(\nu_1, \nu_2; \lambda)$ の上側 5% 点の近似相対誤差 ($\times 10^{-4}$)

$\sqrt{\lambda/\nu_1}$	λ	ν_1	ν_2	真値	(4.3)	[To96] (4.7)	[SZ60] (4.5)	[Ti65] (4.6)
1	3	3	80	4.9619	27	−31	−11	−55
			90	4.9355	26	−31	−10	−55
			100	4.9145	25	−31	−9	−56
	5	5	80	4.2941	11	−16	15	−25
			90	4.2672	10	−16	16	−25
			100	4.2459	10	−16	17	−26
	10	10	80	3.6615	3	−6	20	−8
			90	3.6330	3	−6	20	−8
			100	3.6103	3	−6	21	−8
	20	20	80	3.2523	1	−2	13	−2
			90	3.2211	1	−2	14	−2
			100	3.1961	1	−2	14	−2
$\sqrt{2}$	6	3	80	6.8035	8	−23	30	−34
			90	6.7634	8	−23	31	−35
			100	6.7314	8	−24	32	−35
	10	5	80	5.9705	3	−11	37	−15
			90	5.9292	3	−11	38	−15
			100	5.8962	3	−11	39	−16
	20	10	80	5.1874	1	−3	27	−4
			90	5.1429	0	−4	28	−5
			100	5.1074	0	−4	29	−5
	40	20	80	4.6860	0	−1	15	−1
			90	4.6369	0	−1	16	−1
			100	4.5975	0	−1	17	−1
2	12	3	80	10.119	1	−12	51	−16
			90	10.050	1	−12	53	−17
			100	9.9951	1	−12	55	−17
	20	5	80	9.0599	0	−5	42	−7
			90	8.9877	0	−5	43	−7
			100	8.9302	0	−5	45	−7
	40	10	80	8.0743	0	−1	24	−2
			90	7.9953	0	−2	26	−2
			100	7.9321	0	−2	27	−2
	80	20	80	7.4546	0	0	11	0
			90	7.3672	0	0	12	0
			100	7.2968	0	0	13	0

表 4.3： $F(\nu_1, \nu_2; \lambda)$ の上側 1% 点の近似相対誤差 ($\times 10^{-4}$)

$\sqrt{\lambda/\nu_1}$	λ	ν_1	ν_2	真値	(4.3)	[To96] (4.7)	[SZ60] (4.5)	[Ti65] (4.6)
1	3	3	80	6.9917	−53	0	208	25
			90	6.9341	−48	−1	212	26
			100	6.8885	−44	−1	215	27
	5	5	80	5.7592	−41	6	158	20
			90	5.7044	−37	6	162	21
			100	5.6610	−33	6	165	22
	10	10	80	4.6478	−28	4	94	10
			90	4.5938	−24	5	97	11
			100	4.5509	−21	5	100	11
	20	20	80	3.9588	−21	2	48	4
			90	3.9028	−17	2	51	5
			100	3.8582	−15	2	52	5
$\sqrt{2}$	6	3	80	9.2550	−44	10	255	26
			90	9.1709	−39	10	260	27
			100	9.1042	−36	10	265	28
	10	5	80	7.7787	−33	8	181	17
			90	7.6971	−28	9	186	18
			100	7.6323	−25	9	190	18
	20	10	80	6.4440	−23	4	101	8
			90	6.3617	−19	4	105	8
			100	6.2962	−16	5	108	8
	40	20	80	5.6176	−18	1	49	3
			90	5.5311	−14	2	51	3
			100	5.4621	−12	2	54	3
2	12	3	80	13.227	−32	10	235	19
			90	13.090	−27	11	241	20
			100	12.981	−24	11	246	21
	20	5	80	11.420	−24	6	156	10
			90	11.283	−20	7	161	11
			100	11.175	−17	7	165	12
	40	10	80	9.7871	−18	2	79	4
			90	9.6456	−15	2	83	4
			100	9.5328	−12	3	86	5
	80	20	80	8.7857	−15	1	36	3
			90	8.6351	−12	1	38	2
			100	8.5146	−10	1	40	2

表 5.1： R **の分布の上側 10% 点の近似相対誤差** $(\times 10^{-4})$ $(\rho = 0.95)$

n	真値 ([O82])	(5.16)	(5.17)	(5.27)
10	0.98228	−18	−12	−63
20	0.97395	−11	−4	−35
30	0.97003	−9	−2	−24
50	0.96591	−7	−1	−15
70	0.96365	−6	−1	−11
100	0.96157	−5	0	−8
120	0.96063	−5	0	−7
140	0.95989	−4	0	−6
160	0.95928	−4	0	−5
180	0.95878	−4	0	−5
200	0.95835	−4	0	−4
300	0.95689	−3	0	−3
400	0.95600	−3	0	−2
500	0.95539	−2	0	−2
600	0.95493	−2	0	−1

表 5.2： R **の分布の上側 10% 点の近似相対誤差** $(\times 10^{-4})$ $(\rho = 0.98)$

n	真値 ([Y77])	(5.16)	(5.17)	(5.27)
5	0.9972	−13	−12	−43
10	0.9930	−6	−5	−25
15	0.9909	−4	−2	−17
20	0.9897	−3	−2	−14
25	0.9888	−3	−2	−12
30	0.9881	−2	−1	−10

表 5.3： R **の分布の上側 10% 点の近似相対誤差** $(\times 10^{-4})$ $(\rho = 0.99)$

n	真値 ([Y77])	(5.16)	(5.17)	(5.27)
5	0.9986	−6	−6	−22
10	0.9965	−3	−2	−12
15	0.9955	−2	−2	−9
20	0.9949	−2	−1	−8
25	0.9944	−1	−1	−6
30	0.9941	−1	−1	−5

表 5.4：R の分布の上側 5% 点の近似相対誤差 ($\times 10^{-4}$) ($\rho = 0.95$)

n	真値 ([O82])	(5.16)	(5.17)	(5.27)
10	0.98658	−18	−11	−53
20	0.97815	−12	−4	−31
30	0.97390	−9	−2	−22
50	0.96930	−8	−1	−14
70	0.96669	−7	0	−11
100	0.96426	−6	0	−8
120	0.96314	−5	0	−7
140	0.96226	−5	0	−6
160	0.96154	−5	0	−5
180	0.96093	−5	0	−5
200	0.96042	−4	0	−4
300	0.95863	−4	0	−3
400	0.95754	−3	0	−2
500	0.95679	−3	0	−2
600	0.95623	−3	0	−2

表 5.5：R の分布の上側 5% 点の近似相対誤差 ($\times 10^{-4}$) ($\rho = 0.98$)

n	真値 ([Y77])	(5.16)	(5.17)	(5.27)
5	0.9983	−9	−9	−31
10	0.9947	−6	−5	−21
15	0.9927	−5	−3	−16
20	0.9913	−3	−1	−12
25	0.9904	−3	−2	−11
30	0.9896	−2	−1	−9

表 5.6：R の分布の上側 5% 点の近似相対誤差 ($\times 10^{-4}$) ($\rho = 0.99$)

n	真値 ([Y77])	(5.16)	(5.17)	(5.27)
5	0.9992	−5	−5	−16
10	0.9974	−3	−3	−11
15	0.9964	−2	−2	−8
20	0.9957	−2	−1	−6
25	0.9952	−1	−1	−5
30	0.9948	−1	0	−4

表 5.7 : R の分布の上側 1% 点の近似相対誤差 ($\times 10^{-4}$) ($\rho = 0.95$)

n	真値 ([O82])	(5.16)	(5.17)	(5.27)
10	0.99229	−15	−9	−37
20	0.98443	−11	−4	−25
30	0.97998	−10	−2	−19
50	0.97482	−8	−1	−13
70	0.97176	−8	0	−10
100	0.96883	−7	0	−7
120	0.96745	−6	0	−6
140	0.96635	−6	0	−6
160	0.96544	−6	0	−5
180	0.96468	−6	0	−5
200	0.96402	−5	0	−4
300	0.96172	−5	0	−3
400	0.96030	−4	0	−2
500	0.95930	−4	0	−2
600	0.95855	−4	0	−2

表 5.8 : R の分布の上側 1% 点の近似相対誤差 ($\times 10^{-4}$) ($\rho = 0.98$)

n	真値 ([Y77])	(5.16)	(5.17)	(5.27)
5	0.9995	−6	−5	−17
10	0.9970	−6	−4	−15
15	0.9951	−4	−2	−12
20	0.9938	−3	−1	−10
25	0.9929	−3	−2	−9
30	0.9921	−3	−1	−8

表 5.9 : R の分布の上側 1% 点の近似相対誤差 ($\times 10^{-4}$) ($\rho = 0.99$)

n	真値 ([Y77])	(5.16)	(5.17)	(5.27)
5	0.9997	−2	−2	−8
10	0.9985	−3	−2	−8
15	0.9976	−2	−2	−6
20	0.9969	−1	−1	−5
25	0.9964	−1	0	−4
30	0.9960	−1	0	−3

参考文献

[A95] Akahira, M. (1995). A higher order approximation to a percentage point of the non-central t-distribution. *Commun. Statist.-Simula.*, **24**(3), 595–605.

[A03] 赤平 昌文 (2003). 統計解析入門. 森北出版.

[AST95] Akahira, M., Sato, M. and Torigoe, N. (1995). On the new approximation to non-central t-distributions. *J. Japan Statist. Soc.*, **25**(1), 1–18.

[AT98] Akahira, M. and Torigoe, N. (1998). A new higer order approximation to a percentage point of the distribution of the sample correlation coefficient. *J. Japan Statist. Soc.*, **28**(1), 45–57.

[ATK05] Akahira, M., Takeuchi, K. and Kato, M. (2005). Approximations to the non-central distributions and the distribution of the sample correlation coefficient. To appear.

[B93] Bagui, S. C. (1993). *CRC Handbook of Percentiles of Non-Central t-Distribution.* CRC Press, Florida.

[JKB95] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions, Vol.2.* (2nd ed.), Wiley, New York.

[NK84] Niki, N. and Konishi, S. (1984). Higher order asymptotic expansions for the distribution of the sample correlation coefficient. *Commun. Statist.-Simula.*, **13**(2), 169–182.

[O82] Odeh, R. E. (1982). Critical values of the sample product-moment correlation coefficient in the bivariate normal distribution. *Commun. Statist.-Simula.*, **11**(1), 1–26.

[Pa49] Patnaik, P. B. (1949). The non-central χ^2- and F-distributions and their applications. *Biometrika*, **36**, 202–232.

[Pe59] Pearson, E. S. (1959). Note on an approximation to the distribution of non-central χ^2. *Biometrika*, **46**, 364.

[Sa63] Sankaran, M. (1963). Approximations to the non-central chi-square distribution. *Biometrika*, **50**, 199–244.

[Sh81] 柴田 義貞 (1981). 正規分布. 東京大学出版会.

[SZ60] Severo, N. and Zelen, M. (1960). Normal approximation to the chi-square and non-central F probability functions. *Biometrika*, **47**, 411–416.

[Ta75] 竹内 啓 (1975). 確率分布と統計解析. 日本規格協会.

[Ti65] Tiku, M. L. (1965). Laguerre series forms of non-central χ^2 and F distributions. *Biometrika*, **52**, 415–427.

[To96] Torigoe, N. (1996). Approximations to non-central χ^2 and F distributions. *J. Japan Statist. Soc.*, **26**(2), 145–159.

[Y72] 山内 二郎 (1972). 統計数値表. 日本規格協会.

[Y77] 山内 二郎 (1977). 簡約統計数値表. 日本規格協会.